Analyse des données en sciences de la Terre
Partiel 2 : Analyse numérique

15/11/2010

Exercice 1 : intégration numérique (5 points)

1. Ecrire une fonction Matlab qui prend en entrée une série $y = (y_1 = f(x_1), y_2 = f(x_2), ..., y_n = f(x_n))$ et son abscisse associée $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$; et qui fournit en sortie l'intégrale numérique I de la série y calculée avec la méthode de Simpson 1/3. On rappelle que la méthode de Simpson 1/3 consiste en l'approximation

$$\int_{x_1}^{x_n} f(x)\mathrm{d}x \simeq \frac{h}{3}\left[y_1 + 4\sum_{j=1}^{\frac{n-1}{2}} y_{2j} + 2\sum_{j=1}^{\frac{n-3}{2}} y_{2j+1} + y_n\right],$$

   et requiert un nombre impair d'éléments. Vérifier cette condition et supprimer le dernier élément si nécessaire.

2. Effectuer le même exercice pour la méthode de Simpson 3/8 définie par l'approximation

$$\int_{x_1}^{x_n} f(x)\mathrm{d}x \simeq \frac{3h}{8}\left[y_1 + 3\sum_{j=1}^{\frac{n-1}{3}} y_{3j-1} + 3\sum_{j=1}^{\frac{n-1}{3}} y_{3j} + 2\sum_{j=1}^{\frac{n-4}{3}} y_{3j+1} + y_n\right],$$

   et qui requiert un nombre pair d'éléments. Vérifier cette condition et supprimer le dernier élément si nécessaire.

3. Utiliser l'une de ses deux fonctions pour calculer l'intégrale suivante

$$\int_0^1 \sqrt{1 - x^2}\mathrm{d}x.$$

Exercice 2 : dérivée seconde dans un espace à deux dimensions (4 points)

Le fichier pression.txt contient trois colonnes : la latitude dans la première colonne, la longitude dans la deuxième colonne et la valeur de la pression atmosphérique dans la troisième colonne. Noter que les valeurs de la colonne 1 varient plus rapidement que les valeurs de la colonne 2, et que le pas dans les colonnes 1 et 2 est régulier.

1. Lire puis représenter les données sous forme de carte.
2. Calculer puis représenter la dérivée seconde de la pression atmosphérique en fonction de la longitude.

Exercice 3 : Evolution de la pCO_2 à Heimaey en Islande (6 points)

Le fichier heimaey.txt contient deux colonnes : le temps en année décimale dans la première colonne, la concentration en CO_2 dans la deuxième colonne.

1. Lire puis représenter les données.
2. Effectuer une moyenne glissante sur 24 points (correspondant à l'équivalent de 2 ans) pour décrire la tendance à long terme, puis superposer la courbe sur la fenêtre précédente.
3. Retirer au signal la tendance à long terme calculée précédemment, puis représenter le résultat sur une nouvelle figure.
4. En utilisant la méthode des moindres carrés, calculer un modèle qui consiste uniquement en une onde annuelle. Veiller à ne pas mettre de NaN dans la matrice normale pour que l'algorithme fonctionne. Superposer le modèle sur la fenêtre précédente.
5. <u>Bonus</u> : en déduire le déphasage t_0. On rappelle qu'une onde progressive peut s'exprimer sous les deux formes équivalentes suivantes

$$a\cos(2\pi\nu t) + b\sin(2\pi\nu t) = c\cos(2\pi\nu(t - t_0)),$$

et que la transition entre les deux membres peut être faite en utilisant l'identité trigonométrique

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta).$$

Exercice 4 : temps caractéristiques du champ magnétique terrestre (5 points)

Le fichier `Champ_Magnetique.txt` contient trois colonnes : le degré n en harmoniques sphériques dans la première colonne, la valeur du temps caractéristique τ_n dans la deuxième colonne, et l'erreur ε_n sur le temps caractéristique dans la troisième colonne.

1. Représenter τ_n en fonction de n avec sa barre d'erreur ε_n.
2. En prenant en compte les erreurs sur les observations, calculer à l'aide des moindres carrés le paramètre a d'un modèle simple de la forme $\tau_n = a/n$. Ajouter le résultat sur la figure précédente.
3. Calculer l'incertitude σ_a sur le paramètre a en utilisant la formule $\sigma_a = \sqrt{\mathrm{var}(\varepsilon_n) \times (A^T A)^{-1}}$, où var désigne la variance expérimentale et A la matrice du modèle des moindres carrés.
4. <u>Bonus :</u> toujours en prenant en compte l'erreur sur les observations, calculer à l'aide des moindres carrés les paramètres d'un modèle plus élaboré de la forme $\tau_n = b \times n^c$.

Rappels sur les moindres carrés

$$\left\{\begin{array}{lcl} y_1 & = & a + bx_1 \\ y_2 & = & a + bx_2 \\ & ... & \\ y_n & = & a + bx_n \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ ... \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ ... & ... \\ 1 & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad y = Ax$$

solution des moindres carrés sous Matlab : `x=A\y`